

## 空时互质采样下栅格失配目标的频率和 DOA 联合估计

吕望晗<sup>1</sup>, 王华力<sup>2</sup>, 牟善祥<sup>1</sup>, 刘峰<sup>1</sup>

(1. 南京理工大学电子工程与光电技术学院, 江苏 南京 210094;

2. 解放军理工大学通信工程学院, 江苏 南京 210007)

**摘要:** 针对空时互质采样下频率和波达方向 (DOA, direction-of-arrival) 稀疏联合估计中存在的二维栅格失配问题, 提出一种栅格失配目标下的频率和 DOA 联合估计方法。首先对入射信号做空时互质采样, 建立虚拟满阵下的二维稀疏恢复模型, 然后在以上模型中引入频率栅格失配误差项和角度栅格失配误差项进行二维修正, 并给出一种改进的贪婪算法, 通过对谱泄露变量联合求解来得到二维栅格失配误差项, 最终将栅格失配目标校正到精确位置上。该方法不仅可以提高空频域上的自由度 (DOF, degrees of freedom), 而且在降低运算量的同时改善了频率和 DOA 联合估计的精度。仿真结果验证了方法的正确性。

**关键词:** 阵列信号处理; 空时互质采样; DOA 估计; 频率估计; 栅格失配

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

## Joint frequency and DOA estimation using spatial-temporal co-prime sampling with off-grid sources

LYU Wang-han<sup>1</sup>, WANG Hua-li<sup>2</sup>, MU Shan-xiang<sup>1</sup>, LIU Feng<sup>1</sup>

(1. School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;

2. College of Communications Engineering, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China)

**Abstract:** A method of joint frequency and direction of arrival (DOA) estimation using spatial-temporal co-prime sampling with off-grid sources was proposed to solve the problem of two-dimensional (2D) mismatches of signals. Firstly, the received signal was sampled by spatio-temporal co-prime sampling technique to construct 2D sparse reconstruction model with the filled coarray. Then the frequency mismatch term and angle mismatch term were incorporated into the received data model. Based on the above modified model, an improved greedy algorithm was presented to obtain the frequency mismatch and angle mismatch by estimating the spectrum leakage terms jointly. So the 2D off-grid sources can be corrected to accurate positions. The method can increase the degrees of freedom (DOF) in the space-frequency domain. Moreover, the method has reduced the amount of computation, and it can improve the frequency and DOA estimation accuracy in the meantime. Simulation results demonstrate the correctness and effectiveness of the proposed approach.

**Key words:** array signal processing, spatial-temporal co-prime sampling, direction-of-arrival (DOA) estimation, frequency estimation, grid mismatch

### 1 引言

多参数估计是阵列信号处理的热点问题<sup>[1-3]</sup>, 其中, 频率和波达方向的联合估计, 即空频二维谱估计显得尤为突出。空频联合估计可以有效地提高空间信源的探测能力和抗干扰能力, 因此被广泛应用在雷达、声呐以及无线通信系统当中。文献[4,5]通

过构造基于延迟抽头的空时二维阵列将一维 MUSIC 和 ESPRIT 算法推广到二维。自 Donocho 等<sup>[6]</sup>提出压缩感知 (CS, compressed sensing) 理论以来, 可以利用信号在空频域上的稀疏特性, 在空时欠采样条件下重构出信号的空频二维谱。文献[7]针对多窄带信号提出了一种空时欠采样下的频率和 DOA 联合估计方法, 此方法大大降低了平均采

收稿日期: 2016-03-03; 修回日期: 2016-10-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61271354)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.61271354)

样速率。文献[8]针对宽频段信号，提出了基于扩维的多通道联合频率和到达角估计方法。尽管以上方法能在欠 Nyquist 采样下有效地测量出目标的频率和 DOA，但其最大可探测目标数（自由度）不会超过空时域的物理采样点数。

为了解决可探测自由度受限制的问题，Vaidyannathan 等<sup>[9,10]</sup>提出了互质采样和互质阵列理论，通过构造差分有限阵列，在不增加物理阵元或时域采样点的情况下大大提高了空域或时域自由度。文献[11~13]针对互质采样理论提出了相应的 DOA 或频率估计算法，并且文献[14,15]解决了互质阵列 DOA 谱稀疏恢复过程中的栅格失配问题。虽然以上方法可以有效地提高空域或频域的自由度，但是要得到互质采样下信号的空频谱需要进行两者之间的配对，而配对算法往往存在数值不稳定等问题。另外，以上栅格校正方法是针对一维谱的，当需要联合校正空频二维栅格时，以上方法不再适用。

针对上述问题，本文基于互质采样和互质阵列理论，首先给出了空时互质采样下 DOA 和频率联合估计的数学模型，此联合估计模型避免了 2 种参数之间的配对。然后针对稀疏恢复过程中空频谱栅格失配现象，提出了一种改进的贪婪算法来解决频率和 DOA 联合稀疏恢复过程中的二维栅格失配问题。在改进的贪婪算法中，首先通过对精确二维感知矩阵进行二元一阶泰勒级数展开得到接收信号的修正模型，然后基于此修正模型对信号的功率和频域谱泄露项以及空域谱泄露项联合求解，最终将所有目标校正到真实位置上。理论推导和仿真分析表明该方法不仅可以使最大可探测目标数超过空时域上的物理采样点数，而且在改善联合估计精度的同时降低了运算量。

## 2 基于空时互质采样的信号模型

构造一个具有  $N + 2M - 1$  个阵元的线性阵列，此线性阵列由 2 个相邻阵元间距满足互质关系的稀疏线性均匀阵（ULA, uniform linear array）组成，这 2 个 ULA 分别为子阵 1 和子阵 2。以最左边的阵元为参考阵元，子阵 1 中各阵元所对应的位置为  $S_1 = \{Mnd, 0 \leq n \leq N - 1\}$ ，子阵 2 中各阵元所对应的位置为  $S_2 = \{Nmd, 0 \leq m \leq 2M - 1\}$ ，其中， $M$  和  $N$  是互质的，子阵 1 和子阵 2 的第 1 个阵元重合， $d$

是输入信号所在频段最高频率对应波长的一半。对每个阵元的接收信号进行互质采样，互质采样器是由 2 个采样率分别为  $f_{s_1} = \frac{1}{MT}$  和  $f_{s_2} = \frac{1}{NT}$  的 A/D 采样器构成，其中， $\frac{1}{T}$  是 Nyquist 采样率。整个空时互质采样系统如图 1 所示。

假设空间有  $D$  个不相关的远场窄带信号以角度  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D\}$  入射到此阵列上，对应的频率为  $\{f_1, f_2, \dots, f_D\}$ 。为了便于分析，将  $D$  个源窄带信号建模成  $D$  个复正弦信号，即  $\{A_i e^{j2\pi f_i t + j\phi_i}, A_2 e^{j2\pi f_2 t + j\phi_2}, \dots, A_D e^{j2\pi f_D t + j\phi_D}\}$ ，其中， $A_i (i = 1, \dots, D)$  表示复正弦信号的幅度， $\phi_i (i = 1, \dots, D)$  为第  $i$  个信号的随机相位。用  $x_{p_1}[n]$  表示第  $p (p = 1, \dots, N + 2M - 1)$  个阵元以  $f_{s_1}$  采样得到的时域离散数据， $x_{p_2}[m]$  表示第  $p$  个阵元以  $f_{s_2}$  采样得到的时域离散数据， $n$  和  $m$  表征时间离散点。可得

$$\begin{aligned} x_{p_1}[n] &= \sum_{i=1}^D e^{j2\pi d_p \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i}} s_i[n] + w_{p_1}[n] \\ &= \sum_{i=1}^D e^{j2\pi d_p \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i}} A_i e^{j\omega_i M n + j\phi_i} + w_{p_1}[n] \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_{p_2}[m] &= \sum_{i=1}^D e^{j2\pi d_p \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i}} s_i[m] + w_{p_2}[m] \\ &= \sum_{i=1}^D e^{j2\pi d_p \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i}} A_i e^{j\omega_i N m + j\phi_i} + w_{p_2}[m] \end{aligned} \quad (2)$$

其中， $\lambda_i = \frac{c}{f_i}$ ， $c$  为波传播速度， $\omega_i = 2\pi f_i T$  是数字频率， $d_p$  为第  $p$  个阵元与参考阵元之间的距离， $w_{p_1}[n]$  和  $w_{p_2}[m]$  是均值为 0，方差为  $\sigma_n^2$  的复高斯白噪声。

结合互质采样理论，为了获得与互质阵列流型类似的时域流型，令式(1)和式(2)中  $x_{p_1}$  的采样点形式为  $x_{p_1}[2Nk_1 + l_1]$ ， $0 \leq l_1 \leq N - 1, k_1 \geq 0$ ； $x_{p_2}$  采样点的形式取为  $x_{p_2}[2Mk_1 + l_2]$ ， $1 \leq l_2 \leq 2M - 1, k_1 \geq 0$ 。所以可得

$$\begin{aligned} &x_{p_1}[2Nk_1 + l_1] \\ &= \sum_{i=1}^D e^{j2\pi d_p \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i}} A_i e^{j\omega_i M(2Nk_1 + l_1) + j\phi_i} + w_{p_1}[2Nk_1 + l_1] \\ &= \sum_{i=1}^D e^{j2\pi d_p \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i} + j\omega_i M l_1} A_i e^{j\omega_i 2MNk_1 + j\phi_i} + w_{p_1}[2Nk_1 + l_1] \end{aligned} \quad (3)$$

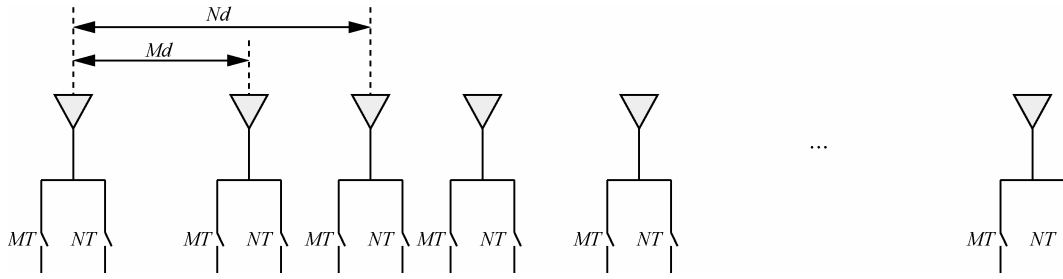


图 1 空时互质采样系统

$$\begin{aligned}
 & x_{p_2}[2Mk_1 + l_2] \\
 &= \sum_{i=1}^D e^{j2\pi d_p \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i}} A_i e^{j\omega_i N(2Mk_1 + l_2) + j\phi_i} + w_{p_2}[2Mk_1 + l_2] \\
 &= \sum_{i=1}^D e^{j2\pi d_p \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i} + j\omega_i N l_2} A_i e^{j\omega_i 2MNk_1 + j\phi_i} + w_{p_2}[2Mk_1 + l_2] \quad (4)
 \end{aligned}$$

将式(3)和式(4)写成向量的形式

$$\mathbf{x}_1[k_1] = \sum_{i=1}^D \mathbf{a}_M(\theta_i, \omega_i) A_i e^{j\phi_i} e^{j\omega_i 2MNk_1} + \mathbf{w}_1[k_1] \quad (5)$$

$$\mathbf{x}_2[k_1] = \sum_{i=1}^D \mathbf{a}_N(\theta_i, \omega_i) A_i e^{j\phi_i} e^{j\omega_i 2MNk_1} + \mathbf{w}_2[k_1] \quad (6)$$

其中， $\mathbf{a}_M(\theta_i, \omega_i) = [\mathbf{b}_{M1}^T(\theta_i, \omega_i), \dots, \mathbf{b}_{M(N+2M-1)}^T(\theta_i, \omega_i)]^T$

且  $\mathbf{b}_{Mn}(\theta_i, \omega_i) = [e^{j2\pi d_n \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i} + j\omega_i M \cdot 0}, \dots, e^{j2\pi d_n \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i} + j\omega_i M(N-1)}]^T$ ， $\mathbf{a}_M(\theta_i, \omega_i)$  是针对采样率  $f_{s_1}$  的空频二维导向矢量。

同理可以得到针对采样率  $f_{s_2}$  的空频二维导向矢量

$\mathbf{a}_N(\theta_i, \omega_i) = [\mathbf{b}_{N1}^T(\theta_i, \omega_i), \dots, \mathbf{b}_{N(N+2M-1)}^T(\theta_i, \omega_i)]^T$ ，且

$\mathbf{b}_{Nn}(\theta_i, \omega_i) = [e^{j2\pi d_n \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i} + j\omega_i N \cdot 1}, \dots, e^{j2\pi d_n \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i} + j\omega_i N(2M-1)}]^T$ ，

$\mathbf{x}_1[k_1]$  和  $\mathbf{x}_2[k_1]$  可以理解为阵列分别在采样率  $f_{s_1}$  和  $f_{s_2}$  下的一次空时二维快拍。将  $\mathbf{x}_1[k_1]$  和  $\mathbf{x}_2[k_1]$  进行堆叠构造出以下向量。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}[k_1] &= [\mathbf{x}_1^T[k_1], \mathbf{x}_2^T[k_1]]^T \\
 &= \sum_{i=1}^D \mathbf{a}_{MN}(\theta_i, \omega_i) A_i e^{j\phi_i} e^{j2\omega_i MNk_1} + \mathbf{w}[k_1] \quad (7)
 \end{aligned}$$

其中， $\mathbf{a}_{MN}(\theta_i, \omega_i) = [\mathbf{a}_M^T(\theta_i, \omega_i), \mathbf{a}_N^T(\theta_i, \omega_i)]^T$ ， $\mathbf{w}[k_1] = [\mathbf{w}_M^T[k_1], \mathbf{w}_N^T[k_1]]^T$ 。由于噪声是在时域和空域上均值为 0，方差为  $\sigma_n^2$  的高斯白噪声，所以  $\mathbf{w}[k_1]$  的自相关函数为一个对角矩阵  $\sigma_n^2 \mathbf{I}$ ，其中， $\mathbf{I}$  是单位矩阵。考虑到入射信号之间是不相关的，可以得到  $\mathbf{y}$  的协方差矩阵

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{yy} &= E\{\mathbf{y}[k_1] \mathbf{y}^H[k_1]\} \\
 &= \sum_{i=1}^D \mathbf{a}_{MN}(\theta_i, \omega_i) \mathbf{a}_{MN}^H(\theta_i, \omega_i) A_i^2 + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (8)
 \end{aligned}$$

对矩阵  $\mathbf{R}_{yy}$  进行向量化得到

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z} &= \text{vec}(\mathbf{R}_{yy}) \\
 &= \mathbf{B}((\theta_1, \omega_1), \dots, (\theta_D, \omega_D)) \mathbf{p} + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}) \quad (9)
 \end{aligned}$$

### 3 模型分析

从第 1 节的推导可以看出，式(9)中  $\mathbf{B}((\theta_1, \omega_1), \dots, (\theta_D, \omega_D))$  的每一列的表达式为  $\mathbf{a}_{MN}^*(\theta_i, \omega_i) \otimes \mathbf{a}_{MN}(\theta_i, \omega_i)$ ， $\mathbf{p} = [A_1^2, A_2^2, \dots, A_D^2]^T$  为信号在空频谱上的功率。根据 Kronecker 积的性质，矩阵  $\mathbf{B}$  的不同行构成了空时差集，不同的差集可以看成是虚拟阵元和虚拟时域采样点所在的位置。其中，空时互差集的形式为

$$\begin{aligned}
 & e^{j2\pi(d_m - d_n) \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i} \pm j\omega_i(Ml_1 - Nl_2)}, \\
 & 1 \leq m, n \leq N + 2M - 1 \\
 & 0 \leq l_1 \leq N - 1, 1 \leq l_2 \leq 2M - 1
 \end{aligned}$$

自差集的形式为

$$\begin{aligned}
 & e^{j2\pi(d_m - d_n) \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i} + j\omega_i N(l_{21} - l_{22})}, \\
 & 1 \leq m, n \leq N + 2M - 1, 1 \leq l_{21}, l_{22} \leq 2M - 1 \\
 & e^{j2\pi(d_m - d_n) \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i} + j\omega_i M(l_{11} - l_{12})}, \\
 & 1 \leq m, n \leq N + 2M - 1, 0 \leq l_{11}, l_{12} \leq N - 1
 \end{aligned}$$

根据最新的一维互质采样理论<sup>[16]</sup>，可以认为

$e^{j2\pi(d_m - d_n) \frac{\sin \theta_i}{\lambda_i}}$  是空时差集中空域差集成分，其指数部分  $d_m - d_n$  包含了  $\{-(MN + M - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (MN + M - 1)\}d$  中所有的元素，所以空域自由度可以达到  $O(2MN + 2M - 1)$ 。同理， $e^{\pm j\omega_i(Ml_1 - Nl_2)}$ 、 $e^{j\omega_i N(l_{21} - l_{22})}$  和  $e^{j\omega_i M(l_{11} - l_{12})}$  是空时差集中的时域成分，与空域成分类似，其自由度也可以达到  $O(2MN + 2M - 1)$ 。考虑到空域成分和时域成分相互独立，所以在空时域上可以利用的自由度达到  $O(2MN + 2M - 1)^2$ 。在接下来的处理中，感兴趣的数据就是这些空域和时域的连接

续项, 通过合并冗余项, 去除不连续的差集项, 从式(9)中可以得到均匀二维差分空时有限阵列的接收数据

$$\mathbf{z}_c = \mathbf{B}_c((\theta_1, \omega_1), \dots, (\theta_D, \omega_D))\mathbf{p} + \mathbf{n}_c \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{n}_c$  为抽取并且和合并冗余项之后的噪声向量。  $\mathbf{B}_c((\theta_1, \omega_1), \dots, (\theta_D, \omega_D))$  为抽取之后的均匀二维差分空时有限阵列的虚拟流型矩阵。

#### 4 空频二维谱的栅格失配校正算法

考虑到信号在空频域上的稀疏特性, 所以针对式(9)的接收模型, 可以用稀疏恢复的方法来得到信号在空频谱上的支撑集。首先将感兴趣的空频域划分成均匀的二维固定栅格  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_L\} \times \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_R\}$ , 其中, 变量  $\xi_i (i=1, \dots, R)$  的量纲和前面所提变量  $f_i (i=1, \dots, D)$  相同,  $\phi_i (i=1, \dots, L)$  的量纲和  $\theta_i (i=1, \dots, D)$  相同。在以上固定二维栅格上的稀疏恢复模型可以表示为

$$\mathbf{z}_c = \mathbf{B}_c(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{r} + \mathbf{n}_c \quad (11)$$

其中,  $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi}) = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_L\} \times \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_R\}$ 。  $\mathbf{r}$  是  $LR \times 1$  阶矢量, 其中除了有  $D$  个非零值外 ( $D$  个非零值即为向量  $\mathbf{p}$  中的各个项), 其余项均为 0。然而式(11)的稀疏模型只适合目标正好落在预先设定好的固定二维栅格  $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi})$  上的情形, 当目标不在此栅格上时, 会造成二维谱的泄露从而导致估计性能的下落, 实际情况往往是后者。

为此, 现在假设有一个空频二维栅格集  $(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{F}) \triangleq \{(\phi_{ij}, F_{ij}) | 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq R\}$ , 它包含有目标真实 DOA 和频率, 即  $\{(\theta_i, f_i) | 1 \leq i \leq D\} \subseteq (\boldsymbol{\phi}, \mathbf{F})$ 。因此稀疏恢复的精确栅格模型可以表示为

$$\mathbf{z}_c = \mathbf{B}_c(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{F})\mathbf{r} + \mathbf{n}_c \quad (12)$$

将式(12)中精确冗余字典  $\mathbf{B}_c(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{F})$  在固定栅格  $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi})$  上做二元一阶泰勒级数展开, 得到  $\mathbf{B}_c(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{F})$  的近似精确表示

$$\mathbf{B}_c(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{F}) \approx \mathbf{B}_c(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi}) + \Gamma_\phi \mathbf{A}_\phi + \Gamma_\xi \mathbf{A}_\xi \quad (13)$$

其中,  $\Gamma_\phi = \left[ \frac{\partial \mathbf{B}_c(\phi_1, \xi_1)}{\partial \phi_1}, \frac{\partial \mathbf{B}_c(\phi_1, \xi_2)}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{B}_c(\phi_L, \xi_R)}{\partial \phi_L} \right]$ ,

$\Gamma_\xi = \left[ \frac{\partial \mathbf{B}_c(\phi_1, \xi_1)}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \mathbf{B}_c(\phi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{B}_c(\phi_L, \xi_R)}{\partial \xi_R} \right]$ ,  $\mathbf{B}_c(\phi_i, \xi_j)$

表示冗余字典  $\mathbf{B}_c(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi})$  中  $(\phi_i, \xi_j)$  对应的列。 $\mathbf{A}_\phi = \text{diag}(\boldsymbol{\alpha}_\phi)$ ,  $\mathbf{A}_\xi = \text{diag}(\boldsymbol{\alpha}_\xi)$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_\phi$  和  $\boldsymbol{\alpha}_\xi$  分别是角度

栅格误差矢量和频率栅格误差矢量, 是真实目标位置与最近空频栅格点之间的距离分别在频率维和角度维上的投影, 具体表达式为

$$[\boldsymbol{\alpha}_\phi \ \boldsymbol{\alpha}_\xi]^T = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \phi_{11} - \phi_1 \\ F_{11} - \xi_1 \end{array} \right], \dots, \left[ \begin{array}{c} \phi_{1R} - \phi_1 \\ F_{1R} - \xi_R \end{array} \right], \dots, \\ \left[ \begin{array}{c} \phi_{L1} - \phi_L \\ F_{L1} - \xi_1 \end{array} \right], \dots, \left[ \begin{array}{c} \phi_{LR} - \phi_L \\ F_{LR} - \xi_R \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (14)$$

另外, 分别定义空域谱泄露矢量和频域谱泄露矢量为

$$\boldsymbol{\beta}_\phi \triangleq \mathbf{A}_\phi \mathbf{r} = \boldsymbol{\alpha}_\phi \odot \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\beta}_\xi \triangleq \mathbf{A}_\xi \mathbf{r} = \boldsymbol{\alpha}_\xi \odot \mathbf{r} \quad (15)$$

其中,  $\odot$  为 Hadamard 积。将式(13)和式(15)代入到式(12)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_c &= (\mathbf{B}_c(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi}) + \Gamma_\phi \mathbf{A}_\phi + \Gamma_\xi \mathbf{A}_\xi)\mathbf{r} + \mathbf{n}_c \\ &= \mathbf{B}_c(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{r} + \Gamma_\phi \boldsymbol{\beta}_\phi + \Gamma_\xi \boldsymbol{\beta}_\xi + \mathbf{n}_c \end{aligned} \quad (16)$$

在式(16)表示的修正模型中, 原信号的功率  $\mathbf{r}$ , 空域谱泄露矢量  $\boldsymbol{\beta}_\phi$  和频域谱泄露矢量  $\boldsymbol{\beta}_\xi$  是待求项, 且根据谱泄露矢量的定义很容易证明  $\mathbf{r}$ 、 $\boldsymbol{\beta}_\phi$  和  $\boldsymbol{\beta}_\xi$  是联合稀疏的。联合稀疏的求解可用以下优化式子来表示

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3LR \times 1}} \|\mathbf{v}\|_{0,1} \\ \text{s.t. } \mathbf{z}_c = \mathbf{B}_c(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{r} + \Gamma_\phi \boldsymbol{\beta}_\phi + \Gamma_\xi \boldsymbol{\beta}_\xi + \mathbf{n}_c \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $\mathbf{v} = [\mathbf{r}^T \ \boldsymbol{\beta}_\phi^T \ \boldsymbol{\beta}_\xi^T]^T \in \mathbb{R}^{3LR \times 1}$ ,  $\|\mathbf{v}\|_{0,1}$  表示向量  $\mathbf{r}$ 、 $\boldsymbol{\beta}_\phi$  和  $\boldsymbol{\beta}_\xi$  的联合稀疏度。针对式(17)的优化, 此处采用一种改进的贪婪算法来联合求解频谱泄露矢量和空域谱泄露矢量以及信号在空频谱上的功率。

改进的贪婪算法如下。

1) 给定空频谱的稀疏度为  $D$ , 测量值为  $\mathbf{z}_c$ , 固定栅格上的冗余字典  $\mathbf{B}_c(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi})$  以及二元一阶泰勒系数  $\Gamma_\phi$  和  $\Gamma_\xi$  已知。

2) 初始化: 余量  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{z}_c$ , 支撑集  $\Omega = \emptyset$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_\phi = \boldsymbol{\beta}_\xi = \mathbf{0}$ 。

3) 找到距离目标实际位置最近的二维栅格: 令  $\mathbf{q} = \mathbf{B}_c^H(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\mu}$ ,  $\eta = \arg \max_i |q_i|^2$ 。

4) 更新支撑集  $\Omega = \Omega \cup \eta$ 。

5) 联合求解信号功率, 频谱泄露矢量和空域谱泄露矢量:  $[\mathbf{r}_\Omega^T, \boldsymbol{\beta}_{\phi\Omega}^T, \boldsymbol{\beta}_{\xi\Omega}^T]^T = [\mathbf{B}_{c,\Omega}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi}) \ \Gamma_{\xi\Omega} \ \Gamma_{\phi\Omega}]^\dagger \mathbf{z}_c$ 。

6) 求解余量  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{z}_c - \mathbf{B}_{c,\Omega}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{r}_\Omega - \Gamma_{\xi\Omega} \boldsymbol{\beta}_{\xi\Omega} - \Gamma_{\phi\Omega} \boldsymbol{\beta}_{\phi\Omega}$ 。

7) 如果迭代次数大于  $D$ ，结束迭代，否则，转到步骤 3)。

8) 根据式(15)中谱泄露矢量的定义，利用得到的  $\beta_\phi$ 、 $\beta_\xi$  和  $r$  求出角度栅格误差和频率栅格误差矢量  $\alpha_\phi$  和  $\alpha_\xi$ 。

在此算法中，由于采用了最小二乘的思想，在步骤 5)中，必须要使矩阵  $[B_{c,\Omega}(\phi, \xi) \Gamma_{\xi\Omega} \Gamma_{\phi\Omega}]$  的列数小于或等于行数，才可能保证此矩阵的满秩特性。所以尽管第 2 段空时互质模型中产生了  $O(2MN+2M-1)^2$  个自由度，但是只有其中  $\frac{1}{3}$  可用于 DOA 估计，其余  $\frac{2}{3}$  的自由度用于频率栅格失配误差和角度栅格失配误差的估计。所以此算法是以牺牲一部分自由度的代价来换取空频谱估计精度的提高。

### 5 仿真分析

本节主要对提出的空频二维校正算法进行仿真验证。仿真中，空时域互质采样的参数设置为  $M=3$ ， $N=5$ ，即 ULA 中 2 个子阵的位置为  $[0,3,6,9,12]d$  和  $[0,5,10,15,20,25]d$ 。假设噪声为零均值的高斯白噪声，且噪声与信号是不相关的。对感兴趣的空域范围  $-90^\circ \sim 90^\circ$  进行均匀栅格划分，步长为  $2^\circ$ ，所以空域共有 90 个栅格。在频域当中栅格范围为 100~360 MHz，步长为 10 MHz，在频域上共有 27 个栅格。另外，定义均方根误差为

$$RMSE_f = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^D \sqrt{\frac{1}{Mon} \sum_{j=1}^{Mon} (\hat{f}_{mj} - f_m)^2} \quad (18)$$

$$RMSE_\theta = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^D \sqrt{\frac{1}{Mon} \sum_{j=1}^{Mon} (\hat{\theta}_{mj} - \theta_m)^2} \quad (19)$$

其中， $D$  为入射信源个数， $Mon$  表示独立蒙特卡洛实验的次数，仿真中均设为 500， $\hat{f}_{mj}$  和  $\hat{\theta}_{mj}$  为第  $j$  次蒙特卡洛实验中第  $m$  个信源的频率和 DOA 估计值， $f_m$  和  $\theta_m$  是第  $m$  个信源的频率和 DOA 真实值。

**实验 1** 假设空间有 110 个目标，目标均匀地分布于空频二维栅格上（此实验假设目标正好位于栅格上）。设置空时快拍数为 500，信噪比为 10 dB。图 2 为利用上述联合估计方法得到的空频谱。从图 2 可以看出，所有的目标都可以被检测到，而按照传统的方法空时域的自由度上限只能达到

$O(2M+N-1)^2$ 。此实验验证了利用本文提出的联合估计方法的模型可以突破传统子空间类算法的二维自由度上限。这是因为本文提出的二维谱联合估计方法在 Kronecker 积过程中产生了虚拟的阵元和时域样点。

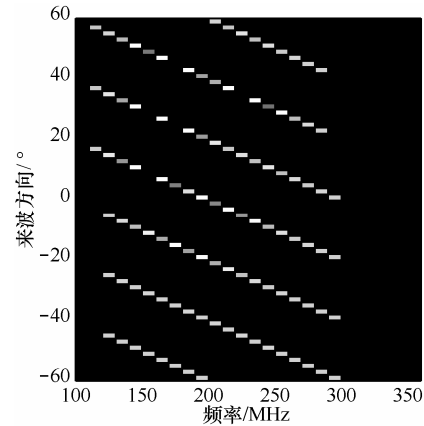


图 2 110 个信号的空频谱

**实验 2** 将此实验与未进行栅格校正的二维 OMP 算法，2D-MUSIC<sup>[4]</sup>和 2D-ESPRIT<sup>[5]</sup>进行对比。为了保证可比性，令本文所提方法的阵元数和时域采样点数与 MUSIC 和 ESPRIT 方法相同，并且这 2 种方法均采用 ULA 阵列和均匀时间采样点。为便于分析，此处假设空间有 2 个远场窄带目标，目标 1 为  $(-2.1^\circ, 151 \text{ MHz})$ ，目标 2 为  $(35.2^\circ, 179 \text{ MHz})$ ，这 2 个目标均不落在二维栅格上。设置快拍数为 500。从图 3 和图 4 可以看出，这 4 种方法的估计性能随着信噪比的提高而提高，本文所提的算法在整个探索的信噪比上性能均优于其他 3 种方法。可以看出未进行栅格校正的方法和本文所提的校正算法在性能上存在显著差异。因为原始的未进行栅格

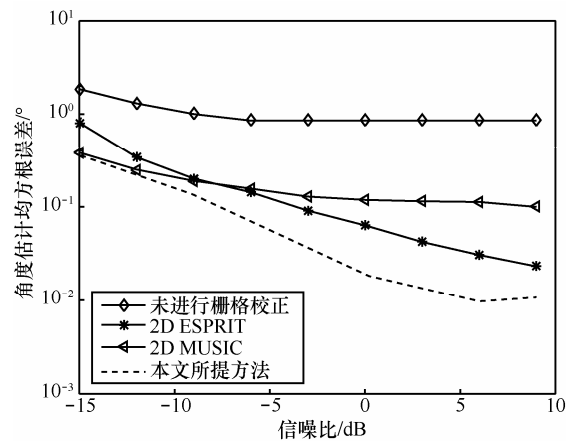


图 3 角度均方根误差随信噪比变化关系

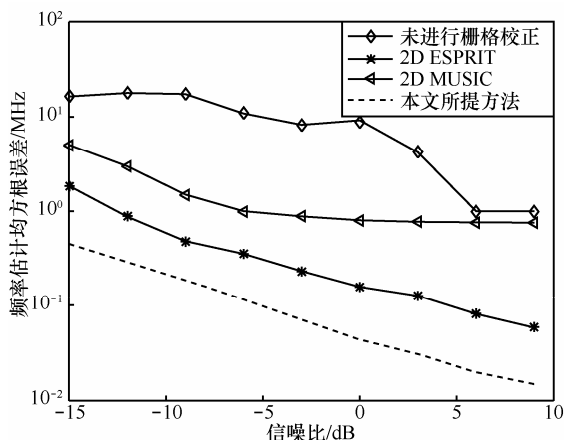


图 4 频率均方根误差随信噪比变化关系

校正的方法估计二维谱时存在着固有误差即栅格失配误差，而本文所提方法对原模型进行了修正，考虑二维误差校正项，从而在很大程度上抑制栅格失配误差项噪声的影响，使最终二维谱估计性能大大提升。

**实验 3** 此实验将验证在达到相同的估计性能时本文所需的计算复杂度远小于较密二维栅格下的情形。此仿真采用 CPU i7-4790k, 16 GB RAM 的计算机配置。仿真参数和实验 2 一样。在不进行栅格失配校正的情况下要对目标进行估计，必须要把二维栅格划分的更密，从实验 2 可以看出，在这种情况下原始的稀疏恢复方法频域栅格需以 1 MHz 为间隔，角度域栅格需以 0.1° 为间隔才有可能保证不受栅格失配的影响。而本文所提二维栅格失配校正算法在仿真时采用的二维栅格和实验 2 相同。经过仿真可以得到本文所提算法需要耗费的时间为 0.062 s，而采用原始不校正栅格的方法耗费的时间为 14.572 s。从仿真结果可以看出，如果采用原始不校正二维栅格的方法来估计信号的二维谱，庞大的计算量将导致空频谱估计的不实时性。而本文所提算法可以在保证空频二维谱估计精度的同时将计算量维持在较低水平。

## 6 结束语

在空时互质采样的框架下，本文提出一种新的频率和 DOA 联合估计方法，该方法可以使空频域上的可探测自由度不受空时物理采样点数的限制。另外，针对空频联合估计在稀疏恢复中存在的二维栅格失配问题，本文也提出了相应的空频二维栅格校正方法，显著提高了频率和 DOA 联合估计的精度。计算机仿真实验验证了上述算

法的有效性和正确性。在此基础上，未来的工作可以考虑将此频率和 DOA 联合估计方法应用到多宽带信号上。

## 参考文献:

- [1] 张海强, 苏卫民, 顾红, 等. 基于矩阵法及联合对角化的 2D DOA 估计[J]. 通信学报, 2013, 34(9): 61-67.  
ZHANG H Q, SU W M, GU H, et al. 2D DOA estimation based on matrix method and joint diagonalization technique[J]. Journal on Communications, 2013, 34(9): 61-67.
- [2] 孙晓颖, 陈建, 林琳. 基于时空处理的频率与二维 DOA 联合估计算法[J]. 通信学报, 2009, 30(8): 39-44.  
SUN X Y, CHEN J, LIN L. Joint signal carrier frequency and 2D DOA estimation method based on space-time processing[J]. Journal on Communications, 2009, 30(8): 39-44.
- [3] 吴云韬, 侯朝焕, 王荣, 等. 一种基于高阶累积量的近场源距离、频率和方位联合估计算法[J]. 电子学报, 2005, 33(10): 1893-1896.  
WU Y T, HOU C H, WANG R, et al. Joint ranges DOAs and frequencies estimation of multiple near-field sources using cumulant[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(10): 1893-1896.
- [4] WANG S, CAFFERY J, ZHOU X. Analysis of a joint space-time DOA/FOA estimator using MUSIC[C]//IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications. 2001: B138-B142.
- [5] WANG X D, ZHANG X F, LI J F, et al. Improved ESPRIT method for joint direction-of-arrival and frequency estimation using multiple-delay output[J]. International Journal of Antennas and Propagation, 2012(1):1018-1020.
- [6] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52 (4): 1289-1306.
- [7] KUMAR A A, RAZUL S G, SEE S M S. An efficient sub-Nyquist receiver architecture for spectrum blind reconstruction and direction of arrival estimation[C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2014: 6781-6785.
- [8] 赵曼, 陈辉. 基于扩维的多通道联合频率和到达角估计[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(1): 147-151.  
ZHAO M, CHEN H. Multichannel joint frequency and DOA estimation based on expanded dimension[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2014, 36(1): 147-151.
- [9] VAIDYANATHAN P P, PAL P. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59 (2): 573-586.
- [10] PAL P, VAIDYANATHAN P P. Co-prime sampling and the MUSIC algorithm[C]//Digital Signal Processing Workshop and IEEE Signal Processing Education Workshop. 2011: 289-294.
- [11] LIU C L, VAIDYANATHAN P P. Remarks on the spatial smoothing step in co-array MUSIC[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(9): 1438-1442.
- [12] 邵华, 苏卫民, 顾红, 等. 基于稀疏互质 L 型阵列的二维测向算法[J]. 电波科学学报, 2012, 27(5): 886-891.

SHAO H, SU W M, GU H, et al. Two-dimensional direction finding using a sparse L-shaped array[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2012, 27(5): 886-891.

[13] ZHANG Y D, AMIN M G, HIMED B. Sparsity-based DOA estimation using co-prime arrays[C]//IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing. 2013: 3967-3971.

[14] ZHAO T, NEHORAI A. Sparse direction of arrival estimation using co-prime arrays with off-grid targets[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(1): 26-29.

[15] ZHAO T, ELDAR Y C, NEHORAI A. Direction of arrival estimation using co-prime arrays: a super resolution viewpoint[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(21): 5565-5576.

[16] BOUDAHER E, JIA Y, AHMAD F, et al. Multi-frequency co-prime arrays for high-resolution direction-of-arrival estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(14): 3797-3808.



王华力 (1967-), 男, 浙江昌岭人, 博士, 解放军理工大学教授, 主要研究方向为信息感知与处理。

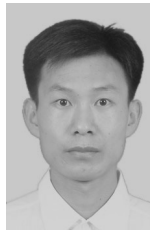


牟善祥 (1953-), 男, 江苏南京人, 博士, 南京理工大学教授, 主要研究方向为相控阵雷达信号处理。

#### 作者简介:



吕望晗 (1991-), 男, 江苏宜兴人, 南京理工大学博士生, 主要研究方向为阵列信号处理、频谱感知、采样技术。



刘峰 (1981-), 男, 山东泰安人, 南京理工大学博士生, 主要研究方向为 MIMO 雷达信号处理。